



## Wykład 3

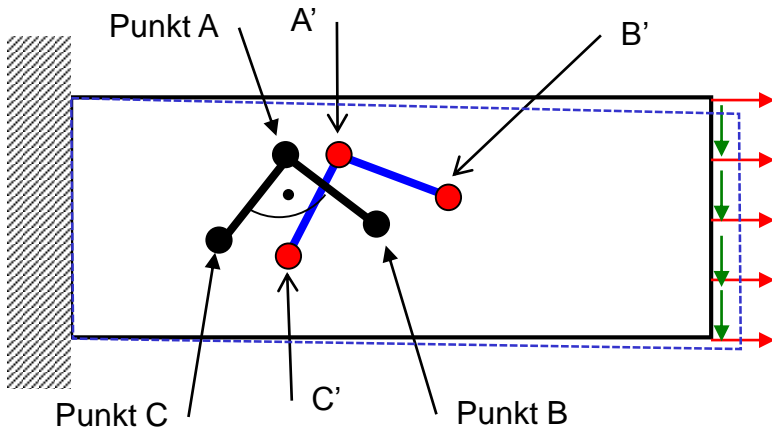
# Stan odkształcenia

Przemieszczenie a odkształcenie

Uproszczona analiza stanu odkształcenia

Pole przemieszczeń a pole odkształceń

# Przemieszczenia a odkształcenia



Rozważmy cieką tarczę prostokątną umocowaną jednym końcem i obciążoną na przeciwległym brzegu

Długość odcinka AB:  $|\overline{AB}| = l$

Długość odcinka A'B':  $|\overline{A'B'}| = l + \Delta l$

Przeszczenie punktu A:

$$\overrightarrow{AA'}$$

Średnie względne wydłużenie odcinka AB:

$$\varepsilon_{\acute{s}r} = \frac{|\overline{A'B'}| - |\overline{AB}|}{|\overline{AB}|} = \frac{l + \Delta l - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

Odkształcenie liniowe (wydłużenie względne) w p. A w kierunku odcinka AB:

$$\varepsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{bezwymiarowe, } \text{‰})$$

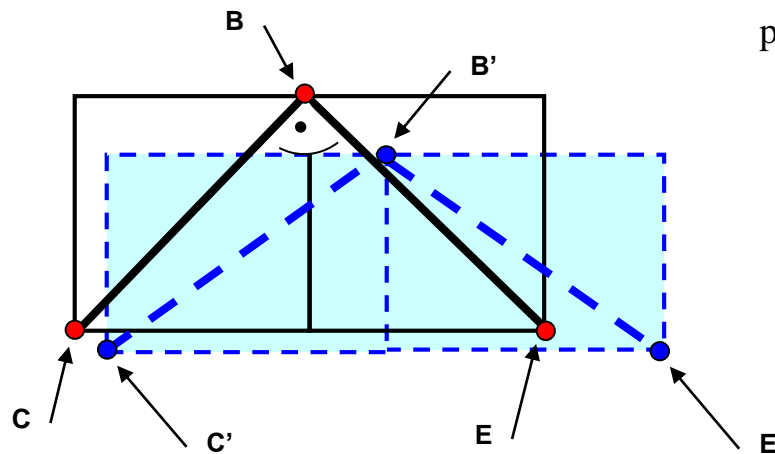
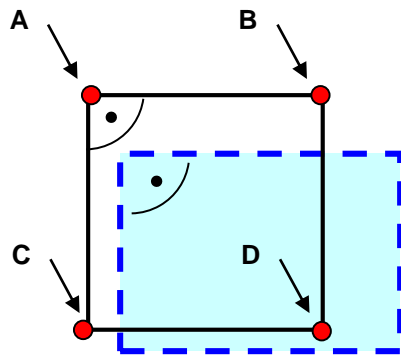
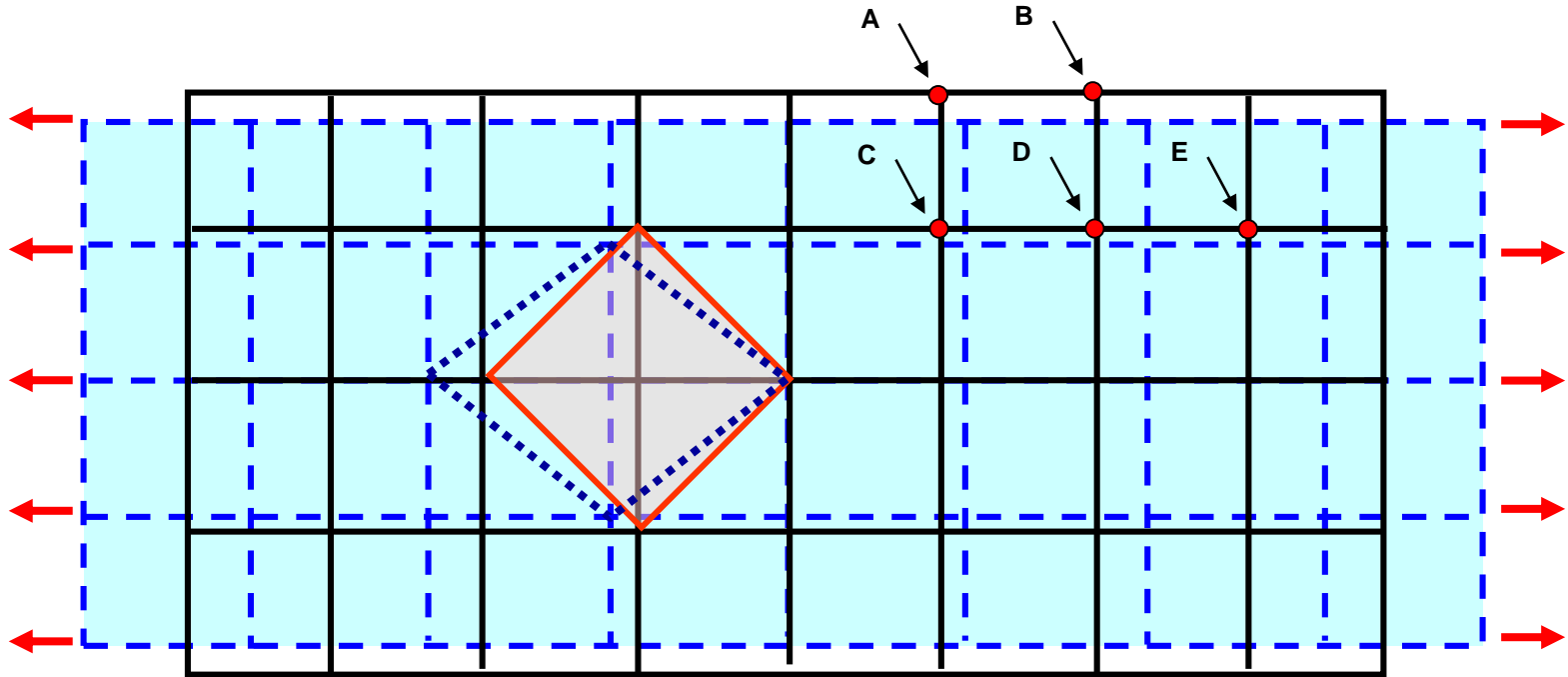
Średnie odkształcenie kąta CAB:

$$\gamma_{\acute{s}r} = \angle CAB - \angle C'A'B'$$

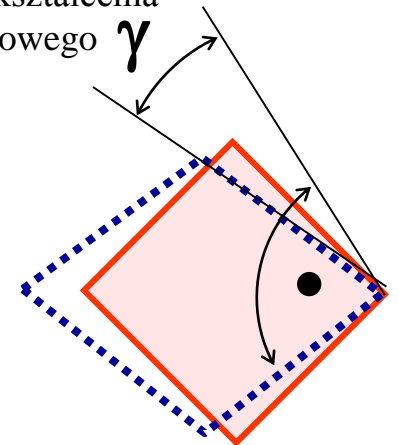
Kąt odkształcenia postaciowego w p.A:

$$\gamma = \lim_{|\overline{AB}| \rightarrow 0, |\overline{AC}| \rightarrow 0} (\angle CAB - \angle C'A'B')$$

# Przemieszczenia a odkształcenia

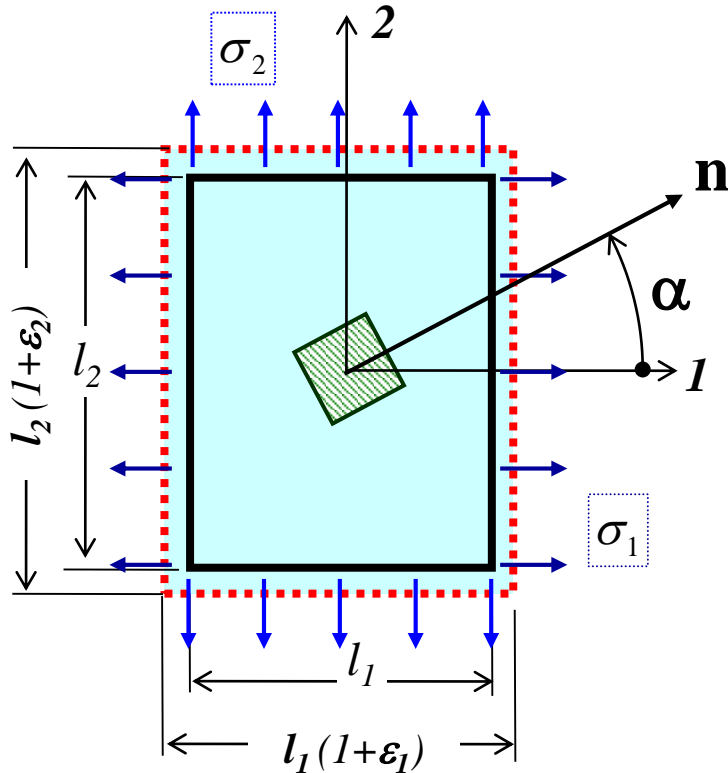


Kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma$



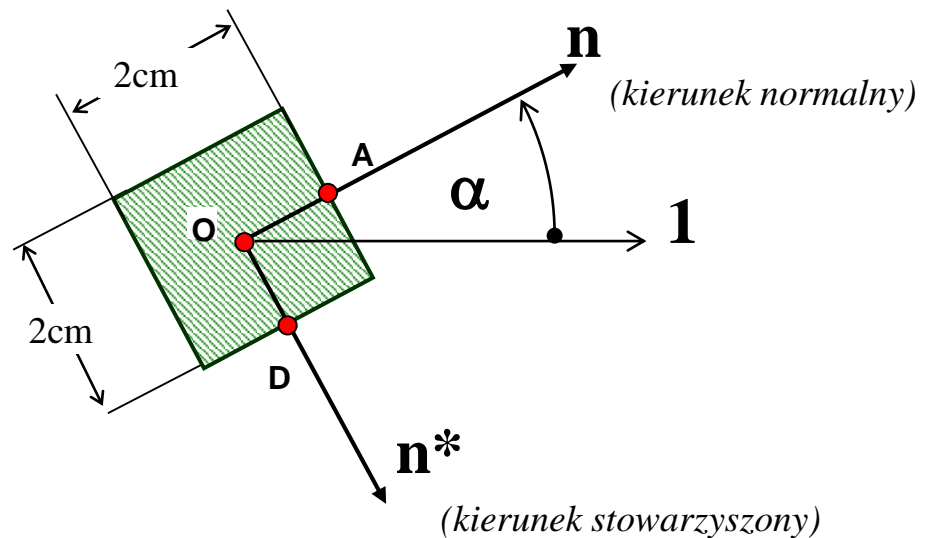
# Uproszczona analiza stanu odkształcenia

Rozważmy cieką tarczę pracującą w płaskim stanie naprężeń głównych

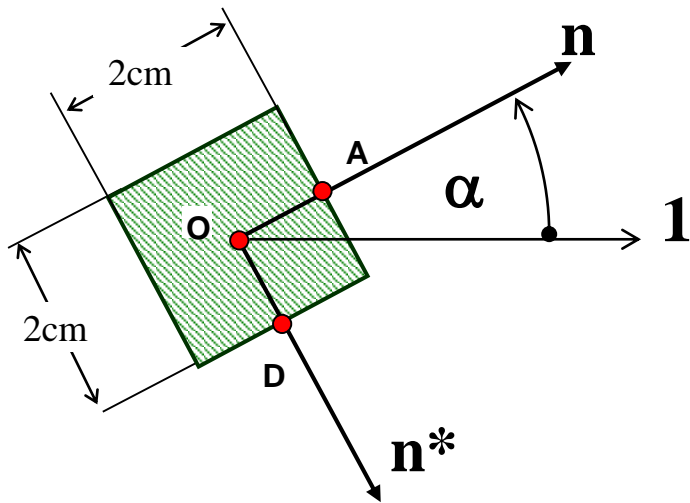


Na skutek rozciągania tarcza odkształci się i stanie się prostokątem o nowych wymiarach

Wyobraźmy sobie w środku tarczy obszar o kształcie kwadratu (o długości boku 2cm) obrócony o kąt  $\alpha$  do kierunku  $1$  (co wskazuje normalna  $\mathbf{n}$ )



# Uproszczona analiza stanu odkształcenia



Współrzędne punktu  $A'$  ( $x_{A'}$ ,  $y_{A'}$ ):

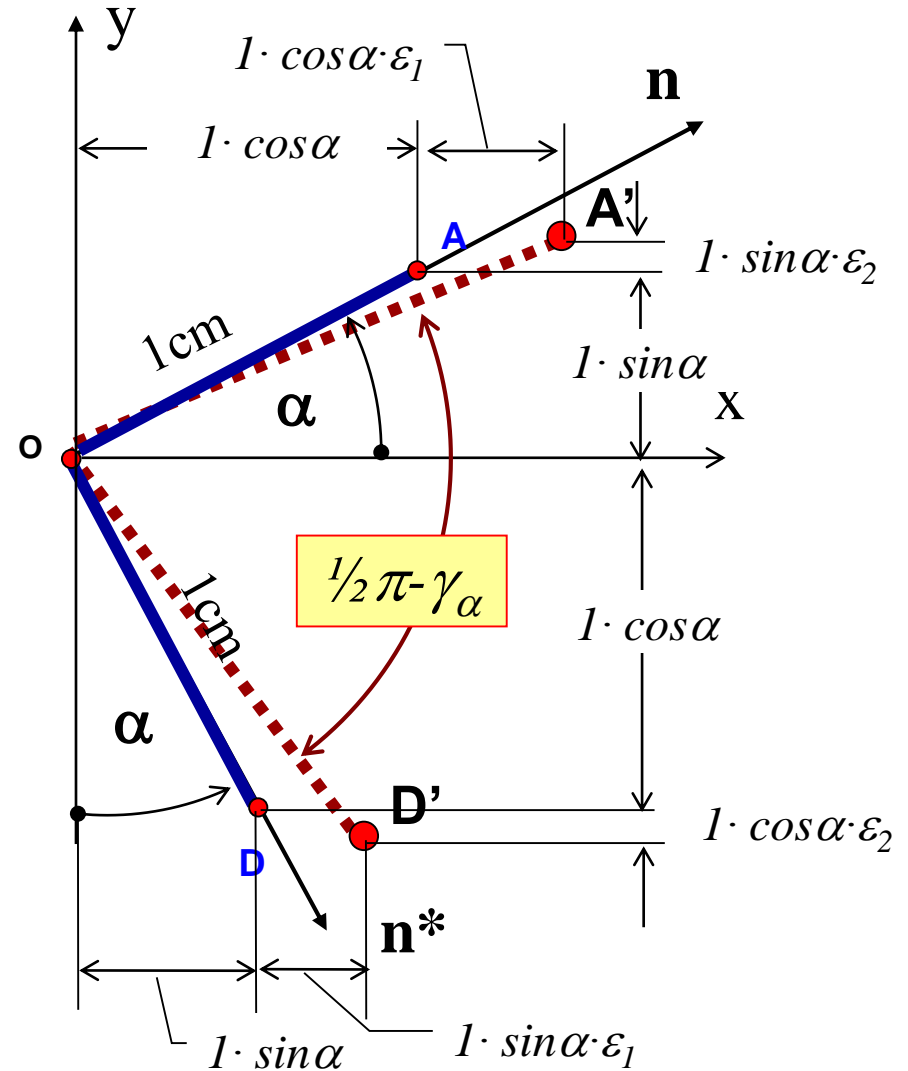
$$x_{A'} = (1 + \varepsilon_1) \cdot \cos \alpha$$

$$y_{A'} = (1 + \varepsilon_2) \cdot \sin \alpha$$

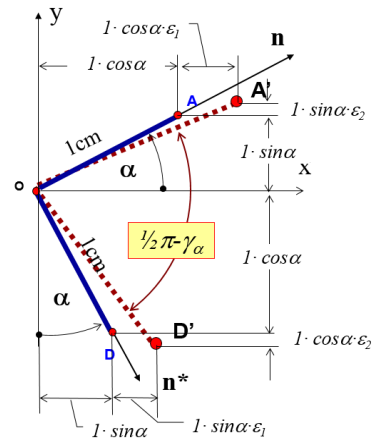
Współrzędne punktu  $D'$  ( $x_{D'}$ ,  $y_{D'}$ ):

$$x_{D'} = (1 + \varepsilon_1) \cdot \sin \alpha$$

$$y_{D'} = -(1 + \varepsilon_2) \cdot \cos \alpha$$



# Uproszczona analiza stanu odkształcenia



$$x_{A'} = (1 + \varepsilon_1) \cdot \cos \alpha$$

$$y_{A'} = (1 + \varepsilon_2) \cdot \sin \alpha$$

$$x_{D'} = (1 + \varepsilon_1) \cdot \sin \alpha$$

$$y_{D'} = -(1 + \varepsilon_2) \cdot \cos \alpha$$

$$|\overline{OA'}| = \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2) \cos^2 \alpha + (1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) \sin^2 \alpha} =$$

Małe wyższego rzędu

$$= \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\varepsilon_1 \cos^2 \alpha + 2\varepsilon_2 \sin^2 \alpha} \approx 1 + \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha$$

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a$$

$a \ll 1$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{|\overline{OA'}| - |\overline{OA}|}{|\overline{OA}|} = \frac{1 + \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha - 1}{1} \rightarrow \varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha$$

$$\angle A'OD': \quad \overline{OA'} \cdot \overline{OD'} = |\overline{OA'}| \cdot |\overline{OD'}| \cdot \cos \angle A'OD' = \cos \angle A'OD' = x_{A'} \cdot x_{D'} + y_{A'} \cdot y_{D'}$$

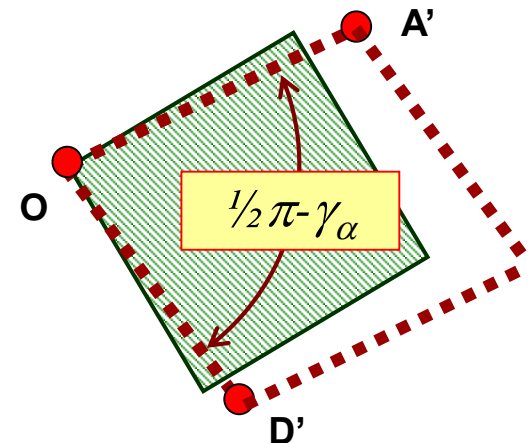
$$\cos \angle A'OD' = (1 + \varepsilon_1)^2 \sin \alpha \cos \alpha - (1 + \varepsilon_2)^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_\alpha\right) = (1 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 - 1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2) \sin \alpha \cos \alpha$$

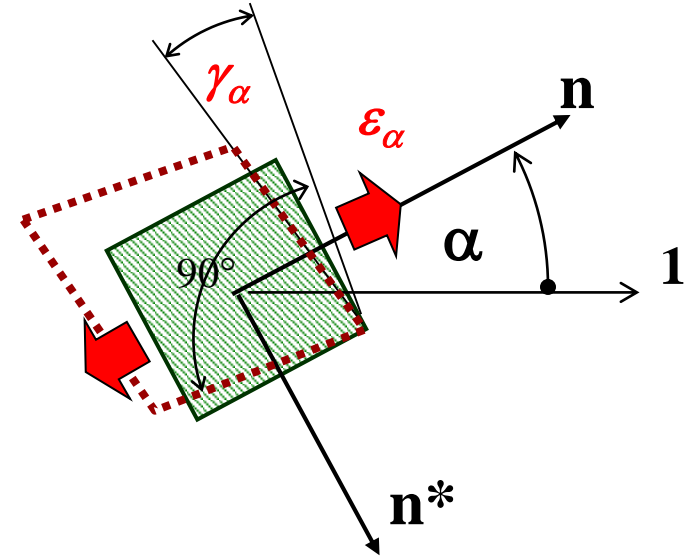
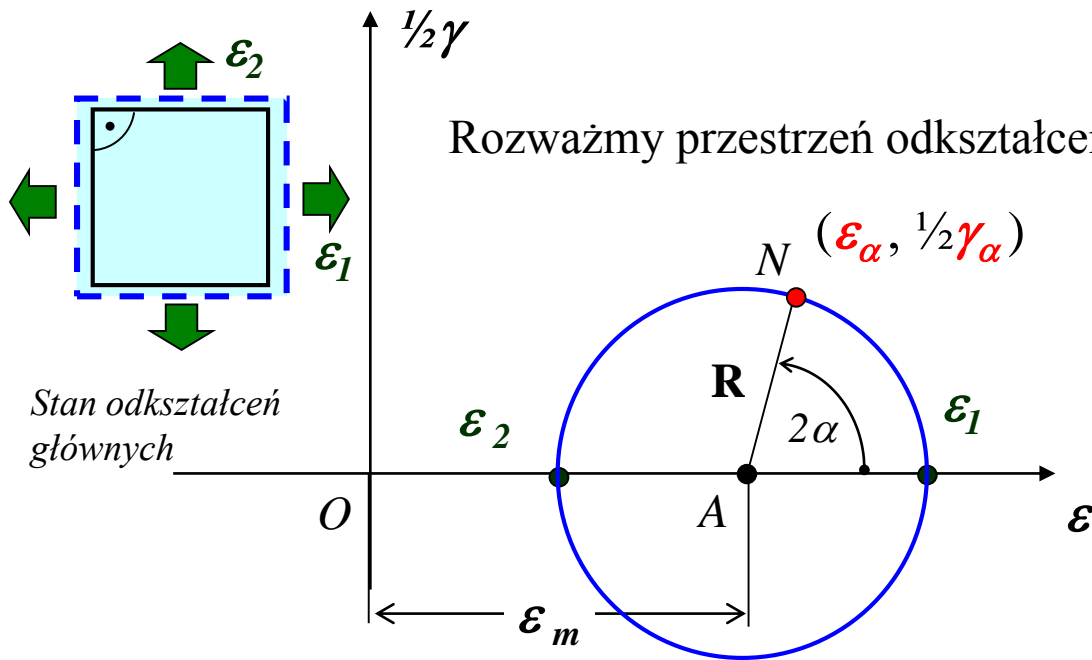
$$\sin \gamma_\alpha \cong 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\gamma_\alpha = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\alpha$$

Kąt odkształcenia postaciowego



# Koło Mohra dla stanu odkształcenia



$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

$$R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

Sprawdzamy wzory transformacyjne:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_m + R \cdot \cos 2\alpha$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2} (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{\varepsilon_2}{2} (1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

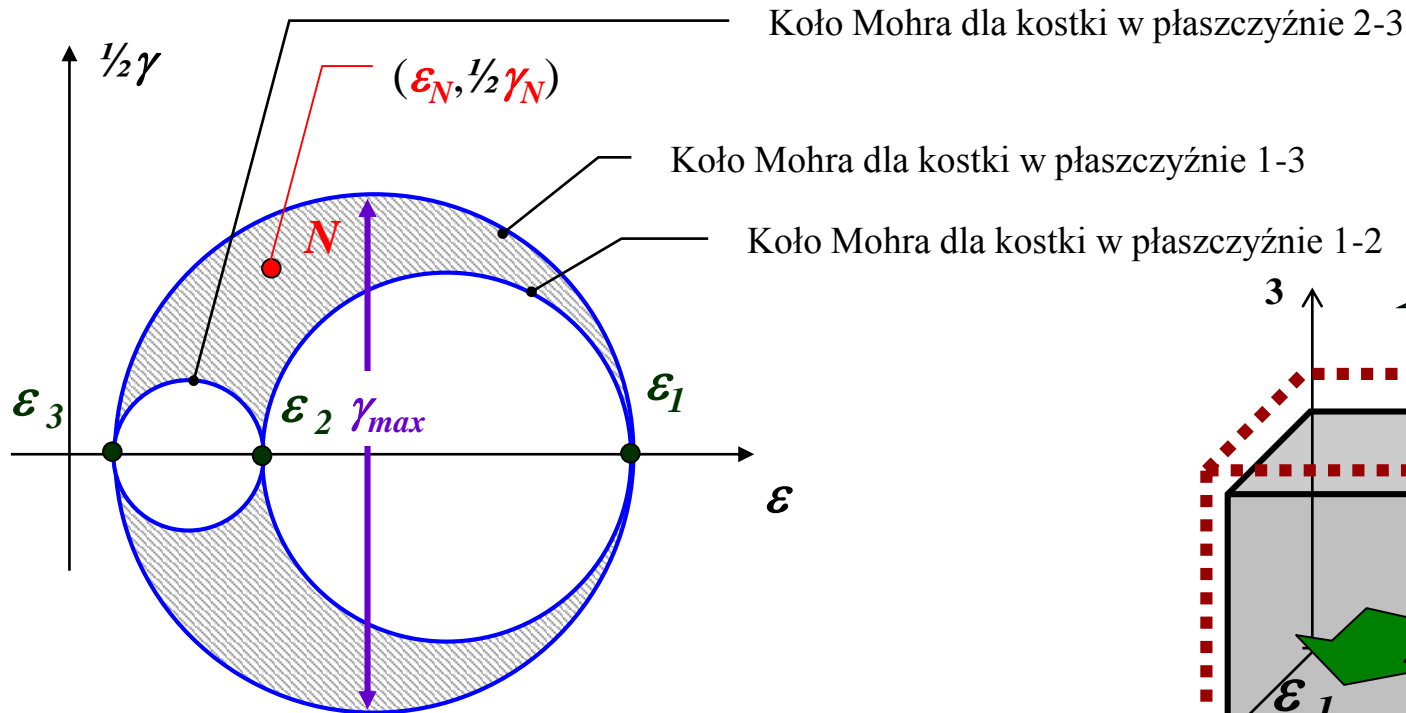
$$\frac{1}{2} \gamma_\alpha = R \cdot \sin 2\alpha$$

$$\gamma_\alpha = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin 2\alpha$$

Wyszło to samo co we wzorach transformacyjnych!

*Punkt N reprezentuje więc stan odkształcenia dla przekroju o normalnej w kierunku  $\alpha$  do kierunku 1*

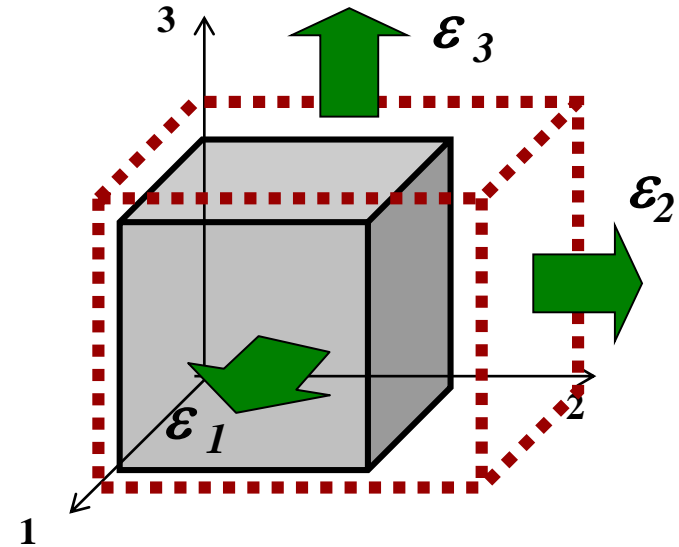
# Uproszczona analiza stanu 3D



W Teorii Sprężystości dowodzi się, że punkt  $N$  leży w polu zakreskowanym między kołami w przestrzeni odkształceń

$$\gamma_{\max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_3|$$

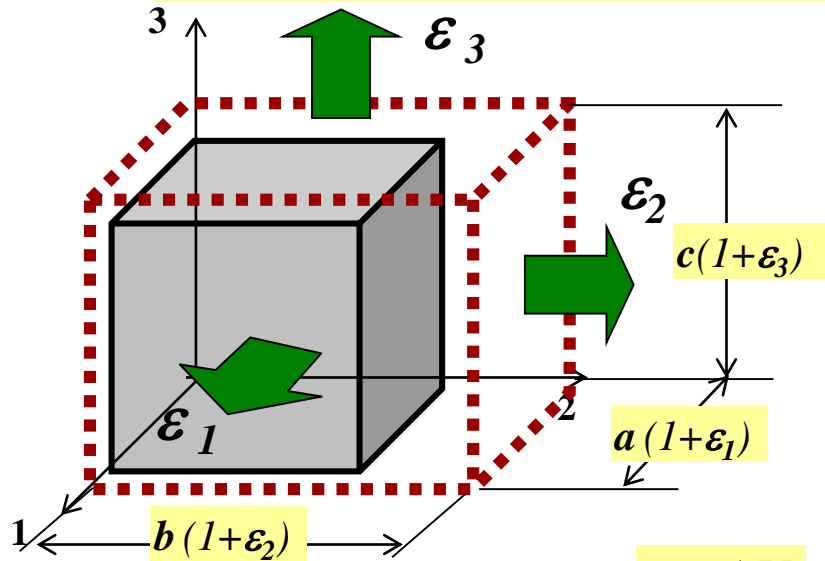
Max. kąt odkształcenia postaciowego



Jeśli w zadaniu odwrotnym (*poszukiwania odkształceń głównych*) na jednym z kierunków mamy odkształcenia główne, to możliwe jest rozwiązanie zadania z wykorzystaniem schematu kół Mohra.



# Uproszczona analiza stanu 3D



**Względna zmiana pola:**  
(odkształcenie powierzchniowe)

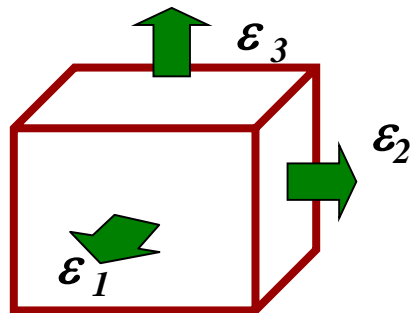
$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{(1 + \varepsilon_1) a \cdot (1 + \varepsilon_2) b - ab}{ab} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

**Względna zmiana objętości:**  
(odkształcenie objętościowe)

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(1 + \varepsilon_1) a \cdot (1 + \varepsilon_2) b \cdot (1 + \varepsilon_3) c - abc}{abc} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

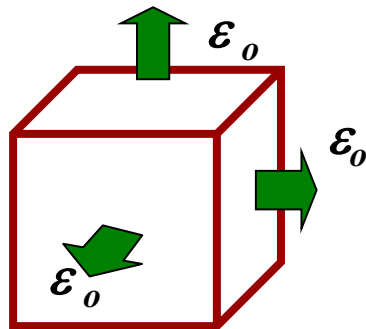
Stan odkształcenia można przedstawić jako superpozycję:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$



$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

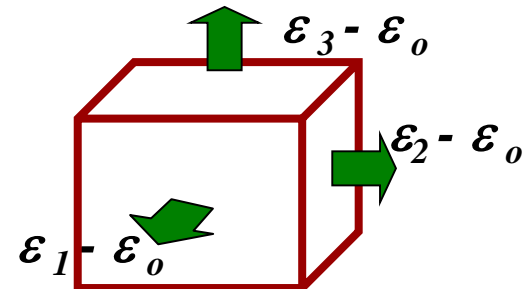
=



$$e = 3\varepsilon_0$$

Odkształcenie objętościowe

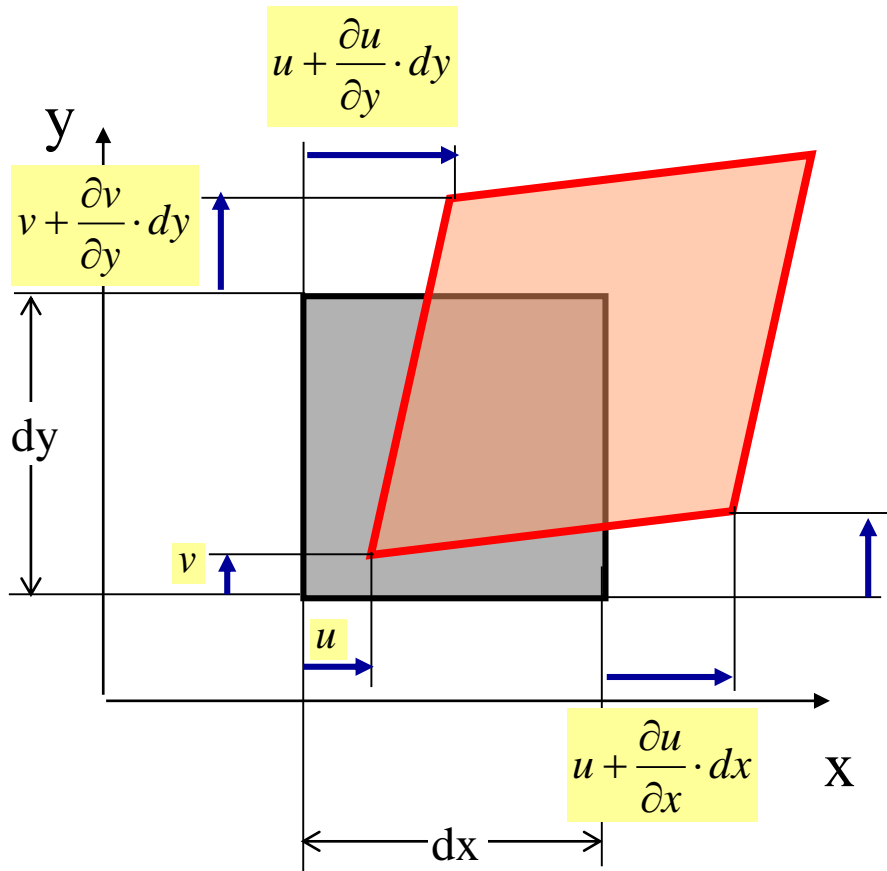
+



$$e = 0$$

Odkształcenie postaciowe

# Pole przemieszczeń a pole odkształceń



Dane jest pole przemieszczeń dane funkcjami:  $u(x,y)$  i  $v(x,y)$

Znaleźć pole odkształceń

$$\varepsilon_x = \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx - u - dx}{dx}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy - v - dy}{dy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx - v}{dx} + \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy - u}{dy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$